Sur l'inversion des intégrales de fonctions à multiplicateurs.

PAR M. EMILE PICARD.

Dans le chapitre VI de mon mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes (Journal de Mathématiques, 1889) je me suis occupé incidemment (paragr. 1, 2, 3, 5, 6) d'une généralisation des intégrales abéliennes relatives à une courbe algébrique. Etant donnée la relation algébrique:

$$f(x, y) = 0$$

j'ai considéré parmi les expressions de la forme:

$$u = \int^{(x, y)} e^{\int^{(x, y)} \lambda(x, y)\, dx} dx, \tag{1}$$

($\lambda(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et y), celles qui, en tout point de la surface de Riemann correspondant à f, n'ont d'autres singularités que des pôles ou des infinis logarithmiques; la nature des singularités est ainsi absolument la même que dans les intégrales abéliennes relatives à la courbe f.

M. Appell faisait au même moment l'étude approfondie des expressions (1) dans son grand mémoire sur les fonctions à multiplicateurs (Acta Mathematica, tome XIII).

Je m'étais posé, relativement à l'équation (1), la question suivante (paragr. 5 et 6): *Dans quel cas une équation de la forme* (1), *le second membre étant de la nature indiquée, donnera-t-elle pour x et y des fonctions uniformes de u?*

Je suis arrivé à la conclusion que *la courbe devait être du genre zéro ou du genre un.* Comme la démonstration de ce théorème n'est que succinctement esquissée dans mon mémoire, je crois intéressant de la reprendre avec plus de détails. On voit que ce théorème comprend comme cas particulier la proposition

déduite autrefois par M. Hermite des recherches de Briot et Bouquet sur l'inversion des intégrales abéliennes, à savoir que l'inversion d'une intégrale abélienne

$$\int^{(x,\, y)} R(x,\, y)\, dx = u$$

ne peut donner pour x et y des fonctions uniformes de u, que si la courbe f est de genre *zéro* ou *un*.

Au lieu de se borner aux expressions (1) n'ayant que des pôles et des infinis logarithmiques, on peut d'une manière générale considérer les expressions (1), en supposant seulement bien entendu qu'elles sont sans singularités essentielles, et se poser à leur égard la même question que plus haut. La réponse est la même, comme nous le montrons à la fin de ce mémoire.

I.

1. Commençons par faire l'étude des expressions u définies plus haut, en la réduisant à ce qui sera indispensable pour notre démonstration. Nous supposerons, comme d'habitude, que la courbe f n'a que des points doubles et a ses directions asymptotiques distinctes; m désignera son degré.

L'expression u peut avoir des pôles et des infinis logarithmiques. Il est évidemment permis de supposer que ces points ne se trouvent ni à l'infini, ni en un point double, ni en un point de ramification de la surface de Riemann correspondant à la fonction algébrique y de x, car il est possible d'effectuer préalablement une transformation birationnelle convenable pour éviter ces circonstances. De plus, on peut aussi admettre que la fonction $\lambda(x, y)$ reste finie en chacun des points doubles, pour la même raison que plus haut, mais on ne peut faire ici aucune hypothèse relativement aux points de ramification.

Cela dit, envisageons les infinis de $\lambda(x, y)$. Soit d'abord (a, b) un infini qui ne soit pas un point de ramification, c'est à dire que $f'_b(a, b) \neq 0$. Le point a sera un pôle de $\lambda(x, y)$, et *son résidu devra être un entier positif ou négatif*, pour que le point a soit un point ordinaire, un pôle, ou un infini logarithmique de la fonction u. Désignons par k le nombre des points (a, b) et appelons

$$\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\ldots\, \alpha_k,$$

les résidus (entiers positifs ou négatifs) correspondant à ces différents points.

Considérons maintenant un point de ramification (x_1, y_1) de la surface de Riemann, rendant λ infini. On a

$$y - y_1 = H\sqrt{x - x_1} + \ldots\ldots \qquad (H \neq 0).$$

Donc $\lambda(x, y)$ se développera suivant les puissances de $(x - x_1)^{\frac{1}{2}}$, et pour que le point (x_1, y_1) de la surface de Riemann soit un point ordinaire pour u, on doit avoir pour $\lambda(x, y)$ le développement

$$\lambda(x, y) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_1)^{\frac{1}{2}}} + C_1 + \ldots\,,$$

A_1 étant de la forme $\frac{\mu_1}{2}$, μ_1 *étant un entier au moins égal à* -1.

Il nous reste à parler des points à l'infini qui sont, par hypothèse, comme les précédents, des points ordinaires pour u. Sur un quelcônque des m feuillets, nous devrons avoir, pour x très grand, un développement de la forme

$$\lambda(x, y) = \frac{R}{x} + \frac{R'}{x^2} + \ldots\,,$$

R *étant un entier au plus égal à* -2. Pour chaque feuillet on aura un nombre R.

Ainsi nous avons trois catégories d'entiers

$$\alpha, \ \mu, \ R.$$

Comme il est bien connu, on a entre eux la relation

$$\Sigma\alpha + \Sigma\mu = \Sigma R \tag{2}$$

en écrivant que

$$\int \lambda(x, y)\, dx = 0,$$

l'intégrale étant prise le long du contour fermé rendant la surface simplement connexe, contour classique dans la théorie des surfaces de Riemann.

2. Les expressions u que nous étudions, se partagent naturellement en fonctions de première espèce, de seconde espèce, et de troisième espèce. Les fonctions de première espèce restent toujours finies, celles de seconde espèce n'ont sur la surface de Riemann d'autres infinis que des pôles, enfin il y a des infinis logarithmiques pour les fonctions de troisième espèce.

On voit immédiatement à quelles conditions l'expression (1) sera une fonction *de première espèce*. Tous les entiers α *doivent être positifs*, afin que le point (a, b) ne soit pas un pôle ou un infini logarithmique.

II.

3. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème énoncé. On va donc supposer que l'inversion de l'expression (1) donne pour x et y des

fonctions uniformes de u, *et on veut démontrer que la courbe sera du genre zéro ou du genre un.*

4. Ecrivons de nouveau la relation

$$\int^{(x,y)} e^{\int^{(x,y)} \lambda(x,y)\,dx}\, dx = u.$$

Supposons d'abord que le premier membre soit une fonction de première espèce. Il est immédiat qu'il ne peut y avoir pour $\lambda(x, y)$ de pôles (a, b), car le développement de u suivant les puissances croissantes $(x - a)$ est de la forme

$$u = u_0 + C(x - a)^{\alpha+1} + \ldots.$$

et l'inversion ne peut conduire à une fonction uniforme que si $\alpha = 0$. *Tous les nombres α sont donc nuls*, et on a alors, d'après la relation (2),

$$\Sigma\mu = \Sigma R. \tag{3}$$

Passons maintenant aux points (x_1, y_1). Comme $y - y_1$ et $x - x_1$ doivent être des fonctions uniformes de u, il en sera de même de $\sqrt{x - x_1}$, et il en résulte de suite que tous les μ doivent être égaux à -1. *Ainsi le nombre μ correspondant à chacun des points de ramification doit être égal à -1.*

Il ne nous reste plus qu'à considérer les points à l'infini. On voit encore immédiatement que tous les R doivent avoir la valeur -2.

Ainsi nous avons

$$\Sigma\mu = -[m(m-1) - 2d],$$

en désignant par d le nombre des points doubles de f, et de plus

$$\Sigma R = -2m.$$

La relation (3) donne donc

$$d = \frac{m(m-3)}{2}.$$

La courbe sera par suite du genre un, comme nous voulions l'établir.

Allons plus loin, en cherchant quelle sera alors la forme de l'expression u. Soient $\lambda(x, y)$ et $\lambda_1(x, y)$ deux fonctions rationnelles conduisant à une expression u qui satisfassent aux conditions que nous venons de trouver. La différence

$$\int^{(x,y)} [\lambda(x, y) - \lambda_1(x, y)]\, dx$$

sera une intégrale abélienne n'ayant pas d'infinis; elle se réduira donc à une intégrale de première espèce. Ainsi, quand on aura une fonction $\lambda(x, y)$ satisfaisant aux conditions requises, on les obtiendra toutes bien facilement. Or, appelons v l'intégrale de première espèce de la courbe f de genre *un*; l'intégrale v est une expression u, et on peut poser

$$v = \int \frac{dv}{dx}\, dx = \int e^{\int \frac{v''}{v'} dx} . dx \qquad \left(v' = \frac{dv}{dx},\ v'' = \frac{d^2 v}{dx^2}\right).$$

Une forme particulière de $\lambda(x, y)$ sera donc $\frac{v''}{v'}$, et sa forme générale sera par suite

$$\lambda(x, y) = \frac{v''}{v'} + a v'$$

a étant une constante, et on a comme forme générale de u:

$$u = \int e^{av} . v' \, dx .$$

Il en résulte que u se réduit, soit à l'intégrale de première espèce (pour $a = 0$), soit à

$$e^{av}$$

abstraction faite d'un facteur constant sans intérêt. *Les fonctions inverses sont donc, soit des fonctions doublement périodiques de u, soit des fonctions doublement périodiques de la combinaison linéaire*

$$A \log u + B,$$

A et B étant des constantes.

5. Nous avons supposé que u était de première espèce. Supposons la maintenant de *seconde espèce*. Nous allons montrer d'abord qu'elle ne peut avoir qu'un seul pôle. Supposons en effet que u ait sur la surface de Riemann deux pôles A et A'. Quand (x, y) s'approche de A, u augmente indéfiniment et inversement aux valeurs de u d'un module suffisamment grand correspond uniformément un certain domaine autour de A. Allons de A en A' par un chemin déterminé, d'ailleurs quelconque; u augmentera indéfiniment quand (x, y) se rapprochera de A', et aux valeurs de u d'un module suffisamment grand correspondra uniformément un certain domaine autour de A'. A une même valeur de u suffisamment grande correspondront ainsi deux valeurs de (x, y) l'une dans le voisinage de A, l'autre dans le voisinage de A', et il est clair qu'on

pourra passer de l'une à l'autre en faisant décrire à u un chemin convenable dans son plan, chemin qui correspondra au déplacement de (x, y) depuis la première valeur jusqu'à la seconde sans s'éloigner du chemin déterminé tracé plus haut arbitrairement entre A et A'. L'inversion ne donnera donc pas pour x et y des fonctions uniformes de u, si l'expression (1) a plus d'un pôle.

Le pôle unique est nécessairement compris parmi les points (a, b), et l'inversion ne peut être uniforme que si la valeur de α correspondante est égale à -2. L'inversion uniforme exige aussi qu'il n'y ait pas d'autres points (a, b), pour la raison donnée au paragraphe précédent. Pareillement tous les nombres μ sont égaux à -1 et les nombres R à -2. La relation (2) nous donne alors

$$-2-[m(m-1)-2d]=-2m$$

d'où l'on conclut

$$d=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

c'est à dire que *la courbe est unicursale.**

Puisqu'il n'y a pas de cycles, la fonction de u, qui est de seconde espèce, est une fonction rationnelle de x et y, et par suite du paramètre θ en fonction rationnelle duquel on peut exprimer x et y. Il est donc évident que x et y *seront des fonctions rationnelles de* u.

6. Supposons enfin que u soit une fonction de *troisième espèce.* Tout d'abord dans le voisinage d'un point a, la partie de u devenant infinie ne peut avoir une partie polaire et une partie logarithmique, car l'inversion ne pourrait dans ce cas être uniforme. Donc dans le voisinage d'un point (a, b) nous aurons:

$$A\log(x-a)+\ldots\ldots=u, \tag{4}$$

la partie non écrite étant holomorphe en $x-a$.

Posons

$$u=u'+iu'',\quad x-a=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad A=\alpha+i\beta,$$

* On pourrait arriver à ce résultat sans commencer par établir qu'il n'y a qu'un seul pôle. Supposons en effet qu'il y ait λ pôles, on aurait:

$$-2\lambda-[m(m-1)-2d]=-2m,$$

c'est à dire

$$d=\frac{m(m-3)}{2}+\lambda.$$

λ, s'il n'est pas nul, ne peut donc être égal qu'à l'unité, puisque d ne peut surpasser $\frac{m(m-3)}{2}+1$.

on aura

$$u' = \alpha \log \rho - \beta\theta + \ldots,$$
$$u'' = \beta \log \rho + \alpha\theta + \ldots,$$

les parties non écrites tendant vers des valeurs finies déterminées quand x tend vers a. On tire des deux égalites précédentes

$$\alpha u' + \beta u'' = (\alpha^2 + \beta^2) \log \rho + \ldots.$$

Donc quand x est suffisamment voisin de a, on a

$$\alpha u' + \beta u'' < 0$$

et, en désignant par γ une quantité *positive* suffisamment grande, on voit de suite qu'il y a, par la relation (4), une correspondance uniforme entre un cercle d'un rayon suffisamment petit décrit autour de a, et le demi plan défini dans le plan de u par l'inégalité:

$$\alpha u' + \beta u'' + \gamma < 0. \tag{5}$$

Ceci posé, on voit d'abord, en raisonnant comme au paragraphe précédent, que u ne peut avoir à la fois un pôle et un infini logarithmique, car au voisinage de ce dernier correspond un certain demi plan, tandis qu'au voisinage du pôle correspond tout le domaine du plan u où le module est suffisamment grand; ces deux régions ont une partie commune et par suite à une même valeur de u correspondraient deux valeurs de (x, y).

Nous devons donc seulement examiner le cas où u aurait un ou plusieurs infinis logarithmiques; ces infinis seront des points (a, b), et la valeur correspondante de α sera égale à -1. D'ailleurs il n'y aura pas d'autres points (a, b), car si un point (a, b) était un point ordinaire pour u, l'inversion ne se ferait pas d'une manière uniforme (déjà dit plus haut). On voit d'abord qu'il ne peut y avoir *un seul* point logarithmique. On devrait avoir en effet, d'après la relation (2)

$$-1 - [m(m-1) - 2d] = -2m$$

égalité impossible, puisqu'elle donne pour d un nombre qui n'est pas entier.

Peut-il y avoir pour u deux infinis logarithmiques. En désignant par des lettres accentuées les constantes se rapportant au second infini, on fera correspondre, comme il a été dit plus haut, au voisinage de ce second point un certain demi plan

$$\alpha' u' + \beta' u'' + \gamma' < 0. \tag{6}$$

Pour que l'inversion se fasse d'une manière uniforme, les demi-plans (5) et (6) ne doivent pas avoir de partie commune. Cette circonstance se présentera, si on a

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$$

c'est à dire si les deux droites limitant les demi-plans sont parallèles, et si de plus α et β sont respectivement de signes contraires à α' et β', les constantes positives γ et γ' étant d'ailleurs suffisamment grandes. Rien ne s'oppose donc à ce qu'il y ait *deux* infinis logarithmiques, mais notre raisonnement va nous montrer *qu'il ne peut y en avoir trois.* En effet, le demi plan correspondant à ce troisième point aurait nécessairement une partie commune avec l'un ou l'autre des demi-plans précédents, et par suite l'inversion ne se ferait pas d'une manière uniforme. Pour abréger, nous ne montrons pas, comme plus haut, que les diverses valeurs de (x, y) se permuteraient bien entre elles, car il n'y a rien à changer à cette partie du raisonnement.

Il y a donc deux α égaux à -1, et nous avons donc

$$-1-1-[m(m-1)-2d] = -2m,$$

d'où on conclut encore *que la courbe est unicursale.**

Si on exprime x et y en fonctions rationnelles d'un paramètre θ, l'expression (1) sera alors ici une fonction de θ, holomorphe dans le voisinage de tout point du plan, sauf de deux points θ_0 et θ_1 qui sont des infinis logarithmiques; on aura donc

$$A \log \frac{\theta-\theta_0}{\theta-\theta_1} = u$$

et par suite x et y seront des fonctions rationnelles de e^{au}, a étant une constante. La démonstration est achevée. *La courbe f est du genre zéro ou du genre un*, et nous avons indiqué les formes très simples des fonctions x et y de u.

7. Comme nous l'avons remarqué au début, le théorème de M. Hermite relatif à l'inversion d'une intégrale abélienne

$$\int^{(x,y)} R(x, y)\,dx = u, \quad [f(x, y) = 0], \tag{7}$$

* On pourrait encore ici se dispenser de prouver à priori que le nombre des infinis logarithmiques est *deux*. En le désignant par λ, on aura

$$-\lambda-[m(m-1)-2d] = -2m$$

ou

$$d = \frac{m(m-3)}{2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Si donc λ n'est pas nul, on a $\lambda = 2$.

est un cas particulier de la proposition que nous venons d'établir. Mais ici la démonstration est encore plus simple, et on arrive ainsi de la manière la plus rapide et la plus rigoureuse aux résultats obtenus par Briot et Bouquet dans leur mémoire classique sur les équations de la forme $\Phi\left(x, \frac{dx}{du}\right) = 0$. Aussi ne sera-t-il pas inutile de reprendre dans ce cas particulier la démonstration.

Si l'intégrale (7) est de première espèce, la courbe f est nécessairement de genre *un*, si x et y sont fonctions uniformes de u. C'est le cas le plus facile, où la démonstration ne présente aucune difficulté, puisqu'on a alors

$$R(x, y) = \frac{Q(x, y)}{f'_y},$$

$Q(x, y)$ désignant un polynome adjoint d'ordre $m-3$. En dehors des points doubles, il y aurait des points de rencontre de $Q = 0$ avec f, si le genre de f dépassait l'unité, et par suite x cesserait d'être fonction uniforme de u. *Le genre de f est donc égal à un.* Les deux fonctions x et y sont doublement périodiques.

Si l'intégrale (7) est de seconde espèce, on peut supposer (paragr. 1) que ses pôles sont à distance finie et sont distinctes des points de ramification. Raisonnant alors comme au paragr. 5, nous montrons que u ne peut avoir qu'*un seul* pôle. Ce pôle simple de u sera pour $R(x, y)$ un pôle double. A l'infini, sur chacun des feuillets, on doit avoir un développement de la forme

$$R(x, y) = \frac{h}{x^2} + \frac{h'}{x^3} + \dots \qquad (h \neq 0).$$

Ensuite $R(x, y)$ deviendra infinie aux points de ramification et en ces points seulement, de telle sorte que pour un point de ramification (x, y), on aura :

$$R(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x - x_1}} + k' + \dots \qquad (k \neq 0).$$

Dans toute autre hypothèse en effet x et y ne pourraient être fonctions uniformes de u. Enfin $R(x, y)$ ne s'annulera que pour les points à l'infini.

Ceci posé, considérons l'intégrale

$$\int d \log R, \qquad (8)$$

étendue à un contour rendant la surface simplement connexe. Cette intégrale est nulle, et comme on connait les racines et les pôles de R, elle se calcule immédiatement, ce qui donne

$$-2-[m(m-1)-2d]=-2m.$$

C'est la relation du par. 5 ; on en conclut que *la courbe est unicursale.*

Il ne reste plus à examiner que le cas où u serait de troisième espèce. Le raisonnement du paragr. 6 montre que u a *deux* infinis logarithmiques ; pour les points à l'infini, et pour les points de ramification la forme de $R(x, y)$ est la même que ci dessus. En prenant encore l'integrale (8) le long du même contour, on a :

$$-1-1-[m(m-1)-2d]=-2m,$$

d'où se tire encore la même conclusion.

Quant à la forme des valeurs de x et y, elle s'obtient non moins facilement. Dans le cas où u est de seconde espèce, x et y sont fonctions rationnelles de u, et dans le cas où u est de troisième espèce, x et y sont fonctions rationnelles de e^{au}.

III.

8. Nous allons compléter, pour terminer, le théorème général démontré plus haut. Nous avons supposé que l'expression considérée

$$u=\int^{(x,y)} e^{\int^{(x,y)}\lambda(x,y)\,dx}\,dx,$$

n'avait sur la surface de Riemann que des pôles ou des infinis logarithmiques. Si on prend à priori une expression de cette forme, en supposant seulement qu'elle n'ait pas de singularités essentielles, on pourra avoir certains points (a, b) pour lesquels le résidu correspondant α (voir paragr. 1) n'est pas un entier. La fonction u n'est pas alors uniforme dans le voisinage de (a, b) et la singularité n'est pas de nature logarithmique. Dans quels cas l'inversion pourra-t-elle conduire pour x et y à des fonctions uniformes? Il faut evidemment que

$$\alpha+1=\frac{1}{h},$$

h étant un entier positif ou négatif.

Si nous voulons faire la discussion, nous distinguerons le cas où la fonction u reste toujours finie et celui où elle devient infinie.

Dans le premier cas, les nombres h seront positifs et finis ($h = 1$ étant évidemment exclu). Toutes les autres conditions restant les mêmes, nous obtiendrons en écrivant l'égalité

$$\Sigma\alpha + \Sigma\mu = \Sigma R$$

la relation suivante

$$\Sigma\left(-1 + \frac{1}{h}\right) - [m(m-1) - 2d] = -2m.$$

Ceci nous conduit à:

$$d = \frac{m(m-3)}{2} + \frac{1}{2}\Sigma\left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

On voit que d surpasse $\frac{m(m-3)}{2}$, et par suite *la courbe sera unicursale.* Il faudra de plus que:

$$\Sigma\left(1 - \frac{1}{h}\right) = 2.$$

Désignons par λ le nombre des termes de la somme, on aura

$$\lambda - 2 = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_\lambda},$$

les h étant des entiers supérieurs à *un*. On a manifestement

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_\lambda} \leqq \frac{\lambda}{2},$$

donc $\lambda - 2 \leqq \frac{\lambda}{2}$, c'est à dire $\lambda \leqq 4$.

On doit par suite avoir, soit $\lambda = 3$, soit $\lambda = 4$.

Pour $\lambda = 3$, on a la relation

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = 1.$$

Pour $\lambda = 4$, on a

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = 2.$$

Les solutions de ces équations en entiers positifs sont en nombre très limité; il est sans intérêt de les transcrire, car nous verrons dans un moment que leur discussion a été faite sous une autre forme par Briot et Bouquet.

Passons au cas où u deviendrait infinie. Nous avons toujours

$$\alpha = -1 + \frac{1}{h},$$

h est un entier qui peut être négatif. Le cas de $h = \infty$ correspond à l'infini logarithmique, le cas de $h = -1$ au pôle, de telle sorte que tous les cas sont compris dans la formule précédente. Nous aurons encore :

$$d = \frac{m(m-3)}{2} + \frac{1}{2}\Sigma\left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

La courbe sera donc encore unicursale.

Quant à la nature de x et y, nous l'obtiendrons de suite, en remarquant que, la courbe étant unicursale, on a pour u

$$u = \int e^{\int R(\theta)\,d\theta} . R_1(\theta)\,d\theta,$$

R et R_1 étant rationnelles en θ. Comme il n'y a pas de singularités essentielles, nous aurons nécessairement

$$u = \int (\theta - \theta_1)^{a_1} (\theta - \theta_2)^{a_2} \dots (\theta - \theta_\lambda)^{a_\lambda}\, d\theta$$

et nous avons donc à chercher les cas ou cette relation donne pour θ une fonction uniforme de u, problème classique depuis les recherches de Briot et Bouquet; nous en déduisons encore que x et y seront des fonctions doublement périodiques, des fonctions rationnelles de u, ou des fonctions rationnelles de e^{au}.

FLANVILLE (LORRAINE), le 25 *Septembre*, 1893.